

**6ª Lista de Exercícios – Eletromagnetismo I – Noturno –
2016/2
Entrega: 28 de Novembro.**

6.1 Frequentemente é útil escrever uma onda plana monocromática usando a fórmula de Euler, e tomando a parte real dessa onda:

$$\vec{E} = \text{Re} \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)} \right] \equiv \text{Re} \left[\tilde{E} \right] , \quad \vec{B} \equiv \text{Re} \left[\tilde{B} \right] = \text{Re} \left[\frac{1}{c} \hat{k} \times \tilde{E} \right] .$$

Mostre que podemos escrever a *média temporal* da densidade de energia do campo eletromagnético em termos desses campos complexos, como:

$$\langle u_{EM} \rangle_t = \frac{1}{4} \text{Re} \left[\epsilon_0 \tilde{E} \cdot \tilde{E}^* + \frac{1}{\mu_0} \tilde{B} \cdot \tilde{B}^* \right] .$$

onde o asterisco denota o complexo conjugado. Similarmente, mostre que a média temporal do vetor de Poynting é dada por:

$$\langle \vec{S}_P \rangle_t = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left[\tilde{E} \times \tilde{B}^* \right] .$$

6.2 Analise o caso da polarização *perpendicular* ao plano de incidência (em sala de aula vimos o caso de polarização *paralela* ao plano de incidência – ou seja, quando a direção do campo elétrico é paralela ao plano de incidência). Imponha as condições de contorno e obtenha as equações de Fresnel para o campo elétrico refletido e transmitido. Esboce os gráficos de $\frac{E_R}{E_I}$ e $\frac{E_T}{E_I}$ em função do ângulo de incidência para o caso em que $n_2/n_1 = 1.5$. Calcule os coeficientes de transmissão e reflexão, e mostre que a soma dos dois é 1.

6.3 De acordo com a Lei de Snell, quando a luz passa de um meio opticamente denso para um meio menos denso ($n_1 > n_2$), o vetor de propagação \vec{k} é desviado, de modo que o ângulo de transmissão é maior do que o ângulo de incidência. Em particular, quando o ângulo de incidência é igual a um ângulo crítico:

$$\theta_C \equiv \sin^{-1}(n_2/n_1) ,$$

então $\theta_T = 90^\circ$, e a luz é transmitida paralelamente à interface do meio. Se $\theta_I > \theta_C$, temos o fenômeno da reflexão interna total, onde toda a luz é refletida (não há refração).

- a) Considerando que a interface encontra-se no plano xy , mostre que na reflexão total para uma onda de frequência ω se propagando na direção z temos:

$$\tilde{E}_T(\vec{r}, t) = \tilde{E}_{0T} e^{\kappa z} e^{i(kx - \omega t)} ,$$

onde:

$$\kappa \equiv \frac{\omega}{c} \sqrt{(n_1 \sin \theta_I)^2 - n_2^2} \quad \text{e} \quad k \equiv \frac{\omega n_1}{c} \sin \theta_I .$$

- b) Calcule o coeficiente de reflexão para a onda eletromagnética com polarização paralela ao plano de incidência.
- c) Calcule o coeficiente de reflexão para a onda com a polarização perpendicular ao plano de incidência.
- d) No caso da polarização perpendicular ao plano de incidência, mostre que a parte real dos campos transmitidos (que nesse caso são chamados campos evanescentes) são:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{\kappa z} \cos(kx - \omega t) \hat{e}_y$$
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{\omega} e^{\kappa z} [\kappa \sin(kx - \omega t) \hat{e}_x + k \cos(kx - \omega t) \hat{e}_z]$$

- e) Mostre que, para os campos do item anterior, em média, nenhuma energia é transmitida na direção z .

6.4 [Ex. 10.19 do Griffiths] Calcule os campos elétrico e magnético de um fio reto e infinito, com densidade de carga λ , que se move com velocidade constante v na direção do fio. (*Dica: você pode usar as fórmulas para os campos de cargas pontuais em movimento retilíneo e uniforme, e integrar a distribuição dessas cargas ao longo do fio.*) Pense bem, e veja que você talvez pudesse obter esse mesmo resultado de um outro jeito mais “esperto” e menos trabalhoso.

6.5 Considere um plano infinito em $z = 0$ no qual fazemos passar uma densidade de corrente que oscila no tempo como $\vec{J}(t, z) = J_0 \delta(z) e^{-i\omega t} \hat{x}$. Ou seja, é como se esse plano tivesse uma certa carga superficial, e ele se movimentasse por meio de oscilações harmônicas na direção x . Neste problema vamos verificar como a corrente na superfície desse plano infinito gera ondas planas monocromáticas se propagando na direção z .

- a) Mostre que a densidade de cargas desse sistema físico é constante, $\partial\rho/\partial t = 0$ – ou seja: o plano infinito em $z = 0$ pode apenas ter uma densidade de carga superficial constante.
- b) Como a densidade de carga é constante, haverá uma solução eletrostática – que vamos desprezar, pois estamos interessados nos campos elétricos e magnéticos dinâmicos que aparecem nesse problema.

Esses campos dinâmicos são, portanto, gerados exclusivamente pelo potencial-vetor $\vec{A}(t, \vec{x})$, cuja solução exata é dada por:

$$\vec{A}(t, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{J}(t' = t_R, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|},$$

onde $t_R = t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$ é o tempo retardado.

Usando coordenadas cilíndricas, mostre que podemos expressar \vec{A} como:

$$\vec{A}(t, z) = \hat{x} \frac{\mu_0 J_0}{2} e^{-i\omega t} \int d\rho' \rho' \frac{e^{ik\sqrt{\rho'^2 + z^2}}}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}}$$

- c) Partindo da expressão acima obtenha o campo magnético, cuja única componente é: $\vec{B}(t, z) = B_y \hat{y} = \partial A_x / \partial z$. Preste atenção aos casos em que $z > 0$ e em que $z < 0$.
- d) Agora use a expressão encontrada no item (c) para obter diretamente o campo elétrico, $\vec{E}(t, z) = -\partial A_x / \partial t$.
- e) Finalmente, mostre que os campos \vec{E} e \vec{B} correspondem a uma onda plana, polarizada linearmente, que se propaga com velocidade c na direção de $|z|$ crescente – ou seja, no sentido $+\hat{z}$ na região $z > 0$ e no sentido $-\hat{z}$ na região $z < 0$.

6.6 Carga puntiforme em movimento uniforme

- a) Encontre os potenciais \vec{A} e ϕ para uma carga em movimento uniforme (ou seja, com velocidade constante).
- b) Agora obtenha os potenciais através de uma transformação de Galileu a partir de uma carga em repouso. Mostre que os potenciais obtidos desses dois modos diferem por termos de ordem v/c , onde v é a velocidade da partícula e c é a velocidade da luz.
- c) Os potenciais devem ser *covariantes* sob transformações de coordenadas, o que significa que deve haver uma transformação do “tipo Lorentz” para as “coordenadas” φ e \vec{A} . Qual é a transformação correta a ser usada – e que “corrige” a resposta encontrada no item (b)?
- d) Verifique que a Lei de Gauss, $\oint d\vec{S} \cdot \vec{E} = Q/\epsilon_0$, vale para a carga em movimento uniforme, integrando sobre uma esfera de raio R centrada na carga.
- e) Calcule o vetor de Poynting da carga em movimento uniforme (você pode assumir que a carga se move na direção z).