INTRODUÇÃO À GRAVITAÇÃO E À COSMOLOGIA
Escola Norte-Nordeste de Partículas e Campos, J. Pessoa
10-14/08/2009

Lista de Exercícios 1

1. Converta as seguintes quantidades para o sistema de unidades natural:

   a) Constante de Plack $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}\ J\ s$.

   b) Velocidade de um carro $v = 30\ m\ s^{-1}$.

   c) Momento de um carro $3 \times 10^4\ kg\ m\ s^{-1}$.

   d) Pressão de uma atmosfera $10^5\ N\ m^{-2}$.

   e) Densidade da água $10^3\ kg\ m^{-3}$.

2. Desenhe os eixos x e t para um observador $\mathcal{O}$ e desenhe também:

   a) A linha de universo de um relógio em $x = 1\ cm$.

   b) A linha de universo de uma partícula em movimento com velocidade $dx/dt = 0.1$, e que está em $x = 0.5\ m$ quando $t = 0$.

   c) Os eixos t' e x' de um observador $\mathcal{O}'$ que move-se com velocidade $v = 0.5$ no sentido positivo de x relativo à $\mathcal{O}$ e cuja origem coincide com a de $\mathcal{O}$.

   d) O locus dos eventos cujo intervalo Δs^2 a partir da origem é $-1\ m^2$.

   e) O locus de todos os eventos simultâneos em $\mathcal{O}$ que ocorrem no tempo $t = 2\ m$.

   f) O locus dos eventos com $x' = 1\ m$.

   g) A linha de universo de um fóton que é emitido do evento $t = -1\ m, x = 0$, viaja na direção de x negativo, é refletido quando encontra um espelho localizado em $x' = -1\ m$, e é absorvido quando encontra um detector localizado em $x = 0.75\ m$.

3. Demonstre que as hipérboles $-t^2+x^2 = a^2$ e $-t^2+x^2 = -b^2$ são assíntotas às linhas $t = \pm x$, para qualquer a e b.

4. Suponha que a velocidade v de $\mathcal{O}$ relativo à $\mathcal{O}'$ é pequena, $|v| << 1$. Mostre que a dilatação temporal, a contração de Lorentz e a fórmula de adição de velocidades, podem ser aproximadas por, respectivamente:

   a) $\Delta t \approx (1 + \frac{1}{2}v^2)\Delta t'$.

   b) $\Delta x \approx (1 - \frac{1}{2}v^2)\Delta x'$.

   c) $w' \approx w + v - wv(w + v)$, com $|w| << 1$.

5. Use as transformações de Lorentz para derivar a dilatação temporal e a contração de Lorentz.

6. As coordenadas cilindricas (ρ, ϕ, z) são definidas por

$$\vec{r} = \rho\cos\phi\ \vec{i} + \rho\sin\phi\ \vec{j} + z\ \vec{k}$$

onde $0 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \phi < 2\pi, -\infty < z < \infty$. Obtenha as expressões para os vetores de base natural e dual.

7. Simplifique as seguintes expressões:

a) $A^i \delta_i^j A_j$,

b) $A_i g^{ij} g_{jk} B^k$,

c) $g_{ij} A^i B^j - A^k B_k$.

8. Quais são os valores de:

a) δ_i^i,

b) δ_α^α.

9. Considere o sistema de coordenadas (u, v, w) definido por

$$x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = 2uv + w,$$

onde $-\infty < u, v, w < \infty$.

a) Encontre os vetores de base natural e dual.

b) Encontre o tensor métrico $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ e sua inversa g^{ij}.

c) Suponha que $\vec{A}$ tenha componentes covariantes

$$A_i = v\delta_i^1 - u\delta_i^2 + \delta_i^3$$

nesse sistema de coordenadas. Determine as componentes contravariantes desse vetor.

d) Determine o elemento de linha $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$.

10. Demonstre que os vetores da base natural e da base dual satisfazem $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_i^j$.

11. Suponha que em algum sistema de coordenadas as componentes do tensor A_{ij} de um tensor do tipo $(0, 2)$ satisfaz $A_{ij} = \delta_{ij}$. Mostre que essa propriedade não é independente do sistema de coordenadas. (Sugestão: use as transformações entre o sistemas de coordenadas esférico e cilindrico como um contra-exemplo.)

12. Verifique que a relação $A^{ij} = A^{ji}$, que define um tensor simétrico, é independente do sistema de coordenadas.

13. Mostre que se $A_{ij} = A_{ji}$ e $B^{ij} = -B^{ji}$, então $A_{ij} B^{ij} = 0$.

14. Mostre a qualquer tensor do tipo $(2, 0)$ ou $(0, 2)$ pode ser expresso como a soma de um tensor simétrico com um tensor anti-simétrico.