I ESCOLA DE FÍSICA TEÓRICA
Instituto de Física – USP
21 à 31 de Julho de 2008

INTRODUÇÃO À TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

1a. Lista de Exercícios

1. Mostre que a Hamiltoniana $H(p_i, q_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$ é independente das velocidades.

2. Derive as equações de movimento para uma partícula movendo-se num potencial central em 3 dimensões, em coordenadas esféricas.

3. Resolva a equação da onda

$$\mu \frac{d^2\phi}{dt^2} - Y \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

   e interprete as soluções obtidas.

4. Construa a matriz $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ para uma transformação de Lorentz em que a velocidade relativa dos referencias é a direção-x, e mostre que essa matriz satisfaz $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}$.

5. Mostre que os geradores de Lorentz $L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$ satisfaz a relação de comutação

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = -i\eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} + i\eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} + i\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - i\eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}.$$

6. Mostre que a relação de comutação do gerador de Lorentz com o gerador de translação $P_\mu = -i\partial_\mu$ é

$$[L_{\mu\nu}, P_\rho] = -i\eta_{\mu\rho}P_\nu + i\eta_{\nu\rho}P_\mu.$$

7. No sistema de unidades naturais em que $c = 1$ e $\hbar = 1$ determine a dimensão do momento linear, do momento angular e da energia.

8. Mostre que a adição de uma derivada total à Lagrangeana, isto é, $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \partial_\mu\Lambda^\mu$, para qualquer Λ^μ, não modifica as equações de movimento.

9. Mostre que a corrente de Noether para as transformações de Lorentz, no caso do campo escalar, é

$$j_{\mu\nu\rho} = (-\eta_{\mu\lambda}\mathcal{L} + \partial_\mu\phi\ \partial_\lambda\phi)(\delta_\nu^\lambda x_\rho - \delta_\rho^\lambda x_\nu) = j_{\mu\nu}x_\rho - j_{\mu\rho}x_\nu.$$

10. Calcule a corrente de Noether para dilatações em D dimensões (d-1 dimensões espaciais e uma temporal) quando $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)$. Suponha que o potencial é da forma $\frac{\lambda}{n!}\phi^n$. Determine os valores de D e n para os quais a corrente é conservada.

11. Considere as tranformações conformes $\delta x^\mu = (2x^\mu x^\rho - \eta^{\mu\rho}x_\lambda x^\lambda)\epsilon_\rho$, com ϵ infinitesimal. Mostre que essas transformações, junto com as dilatações $\delta x^\mu = \alpha x^\mu$ (α infinitesimal) e o grupo de Poincaré, formam um grupo com quinze geradores, denominado grupo conforme.