I ESCOLA DE FÍSICA TEÓRICA
Instituto de Física – USP
21 à 31 de Julho de 2008

INTRODUÇÃO À TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

2a. Lista de Exercícios

1. Mostre que $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ e $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ são satisfeitas por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Derive a equação de Dirac e de sua adjunta à partir da Lagrangeana de Dirac.

3. Derive as correntes de Noether correspondentes à uma transformação de fase e à uma transformação quiral do spinor.

4. Mostre que a corrente quiral não é conservada se o campo de Dirac for massivo.

5. Mostre que se a $F_{\mu\nu}$ é antisimétrico então a solução de

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

é $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ para qualquer quadrivetor A_μ.

6. Mostre que as equações de Maxwell com fontes, para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, podem ser escritas como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \qquad \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0.$$

7. Mostre que a Lagrangeana de Dirac minimamente acoplada ao campo eletromagnético é invariante por transformações de gauge.

8. Mostre que se a transformação de gauge no potential é

$$A'_\mu(x) = -iU(x)D_\mu U^\dagger(X)$$

então $F'_{\mu\nu}(x) = U(x)F_{\mu\nu}U^\dagger(x)$.

9. Calcule as transformações acima para o caso infinitesimal em que $U(x) = 1 + i\Lambda^a T^a$.

10. Demonstre a identidade de Bianchi no caso não Abeliano:

$$D_\mu F_{\nu\rho} + D_\nu F_{\rho\mu} + D_\rho F_{\mu\nu} = 0.$$

11. Mostre que

$$I = Tr(\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho})$$

(onde $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ é o tensor de Levi-Civita completamente antisimétrico) é invariante de gauge. Mostre ainda que ele pode ser escrito como a quadri-divergência de um quadrivetor. Mostre que a dimensão de I é L^{-4}. Ele pode ser utilizado na ação de uma teoria de gauge?